

Kuntze, Sebastian; Reiss, Kristina
Unterschiede zwischen Klassen hinsichtlich inhaltlicher Elemente und Anforderungsniveaus im Unterrichtsgespräch beim Erarbeiten von Beweisen. Ergebnisse einer Videoanalyse

Unterrichtswissenschaft 32 (2004) 4, S. 357-379



Quellenangabe/ Reference:

Kuntze, Sebastian; Reiss, Kristina: Unterschiede zwischen Klassen hinsichtlich inhaltlicher Elemente und Anforderungsniveaus im Unterrichtsgespräch beim Erarbeiten von Beweisen. Ergebnisse einer Videoanalyse - In: Unterrichtswissenschaft 32 (2004) 4, S. 357-379 - URN: urn:nbn:de:0111-opus-58234 - DOI: 10.25656/01:5823

<https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:0111-opus-58234>

<https://doi.org/10.25656/01:5823>

in Kooperation mit / in cooperation with:

BELTZ JUVENTA

<http://www.juventa.de>

Nutzungsbedingungen

Gewährt wird ein nicht exklusives, nicht übertragbares, persönliches und beschränktes Recht auf Nutzung dieses Dokuments. Dieses Dokument ist ausschließlich für den persönlichen, nicht-kommerziellen Gebrauch bestimmt. Die Nutzung stellt keine Übertragung des Eigentumsrechts an diesem Dokument dar und gilt vorbehaltlich der folgenden Einschränkungen: Auf sämtlichen Kopien dieses Dokuments müssen alle Urheberrechtshinweise und sonstigen Hinweise auf gesetzlichen Schutz beibehalten werden. Sie dürfen dieses Dokument nicht in irgendeiner Weise abändern, noch dürfen Sie dieses Dokument für öffentliche oder kommerzielle Zwecke vervielfältigen, öffentlich ausstellen, aufführen, vertreiben oder anderweitig nutzen.
Mit der Verwendung dieses Dokuments erkennen Sie die Nutzungsbedingungen an.

Terms of use

We grant a non-exclusive, non-transferable, individual and limited right to using this document.
This document is solely intended for your personal, non-commercial use. Use of this document does not include any transfer of property rights and it is conditional to the following limitations: All of the copies of this documents must retain all copyright information and other information regarding legal protection. You are not allowed to alter this document in any way, to copy it for public or commercial purposes, to exhibit the document in public, to perform, distribute or otherwise use the document in public.

By using this particular document, you accept the above-stated conditions of use.

Kontakt / Contact:

peDOCS
DIPF | Leibniz-Institut für Bildungsforschung und Bildungsinformation
Informationszentrum (IZ) Bildung
E-Mail: pedocs@dipf.de
Internet: www.pedocs.de

Digitalisiert

Mitglied der


Leibniz-Gemeinschaft

Unterrichtswissenschaft

Zeitschrift für Lernforschung
32. Jahrgang / 2004 / Heft 4

5. 2. 06, 100, 14

Thema

Fragen im Unterricht

Verantwortliche Herausgeber:

Karl-Heinz Arnold, Heinz Neber, Alexander Renkl

Karl-Heinz Arnold, Heinz Neber

Einführung..... 290

Anne Levin, Karl-Heinz Arnold

Aktives Fragestellen im Hochschulunterricht: Effekte des
Vorwissens auf den Lernerfolg 295

Heinz Neber

Förderung epistemischen Fragens im Religionsunterricht 308

Detlef Sembill, Katrin Gut-Sembill

Fragen hinter Schülerfragen - Schülerfragen hinterfragen 321

Gudrun Glowalla, Ulrich Glowalla

Fragestrategien zu Lehrtexten im Studium..... 334

Helmut Niegemann

Lernen und Fragen: Bilanz und Perspektiven der Forschung..... 345

Allgemeiner Teil

Sebastian Kuntze, Kristina Reiss

Unterschiede zwischen Klassen hinsichtlich inhaltlicher Elemente
und Anforderungen im Unterrichtsgespräch beim Erarbeiten von
Beweisen - Ergebnisse einer Videoanalyse 357

Buchbesprechungen..... 380

Gutachter 2004 383

Berichtigung 383

Themenplanung 384

Unterschiede zwischen Klassen hinsichtlich inhaltlicher Elemente und Anforderungsniveaus im Unterrichtsgespräch beim Erarbeiten von Beweisen

Ergebnisse einer Videoanalyse

Differences in Argumentation and Proof in German Classrooms - Results of a Video-Based Study

In diesem Beitrag werden Ergebnisse einer Videoanalyse von Erarbeitungsprozessen geometrischer Beweise im gymnasialen Mathematikunterricht der 8. Jahrgangsstufe vorgestellt. Es wurde einerseits untersucht, inwiefern inhaltliche Elemente der Erarbeitung von Beweisen im Unterricht in einzelnen Klassen geleistet wurden und wie groß jeweils die relativen Schülerbeiträge zu diesen inhaltlichen Elementen waren. Andererseits wurde das Anforderungsniveau der vom Lehrer gestellten Fragen und Aufforderungen, sowie die Art ihrer Beantwortung mit einem Kategoriensystem ausgewertet. In beiden Bereichen der deskriptiven Untersuchung zeigen sich deutliche Unterschiede zwischen Klassen bzw. Lehrern. Diese Unterschiede können als Unterschiede in der Qualität von Erarbeitungsphasen von Beweisen im Unterricht interpretiert werden.

This paper presents results of a video-based study on argumentation and proof in German classrooms (year 8 students). The study aimed at identifying different phases of the classroom work linked to proving and at understanding how students contributed to these phases. Moreover, the teacher's questions to the classes were rated with respect to their level of complexity and the way how students were able to give answers to those questions. In all these categories the study revealed remarkable differences between classrooms. These differences may be interpreted with respect to the quality and intensity of mathematical argumentation.

1. Einführung

In internationalen Leistungsvergleichsstudien wie TIMSS und PISA (Baumert, Lehmann et al., 1997; Deutsches PISA-Konsortium, 2001) haben sich

die Schwächen deutscher Schülerinnen und Schüler im Fach Mathematik deutlich bei Nicht-Routine-Aufgaben gezeigt, zu denen auch Aufgaben gehören, die Argumentationen erfordern. In Leistungstests zu geometrischen Basiskompetenzen und zur Beweiskompetenz von Schülern der 7. und 8. Jahrgangsstufe konnte bestätigt werden, dass Beweis- und Argumentationsaufgaben trotz vorhandenem Grundwissen signifikant schlechter gelöst werden als eher technische Items (Reiss, Klieme & Heinze, 2001; Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Dass diese Schwächen sich insbesondere auch in Form von nicht verfügbaren Problemlöseheuristiken für Beweisaufgaben einerseits und andererseits in Defiziten in der beweispezifischen Methodenkompetenz äußern, wurde von Healy & Hoyles (1998), Reiss, Hellmich & Thomas (2002) und Heinze & Reiss (2003) aufgezeigt. Als eine Ursache für die genannten Mängel sieht Reiss (2002) die Art der Behandlung von Beweisen im Unterricht, worauf starke Unterschiede in der Beweiskompetenz zwischen einzelnen Klassen hindeuten.

Um Zusammenhänge zwischen Aspekten von Schulleistung und Gelegenheiten des Lernens im Unterricht aufzudecken, sind in letzter Zeit vermehrt Videostudien durchgeführt worden, in denen Merkmale von Mathematikunterricht und Unterschiede im Klassenraumgeschehen auch im internationalen Vergleich betrachtet werden.

So bezeichnet Klieme (2002) auf der Basis eines Ländervergleichs, der sich auf die TIMSS-Videostudie von 1995 stützt, ein inhaltlich kleinschrittiges, fragend-entwickelndes Unterrichtsgespräch als charakteristisch für den Mathematikunterricht in Deutschland, wie es auch bereits früher von Voigt (1984a, 1984b) beschrieben wurde. Dieser Unterrichtsstil zeichnet sich etwa dadurch aus, dass Aufgaben vom Lehrer in sehr viele kleine Teilschritte zerlegt und in diesen kleinen Schritten dann behandelt werden (vgl. auch Neubrand, 2002). Damit ist eine starke inhaltliche Lenkung des Diskurses im Klassenzimmer durch den Lehrer verbunden. Er spielt im fragend-entwickelnden Unterricht eher die Rolle eines Wissensvermittlers als die eines Initiators von Lernprozessen. Nun muss die Lenkung des Diskurses nicht notwendig heißen, dass Schüleranteile an diesem Diskurs gering sind. Vielmehr erhebt das fragend-entwickelnde Unterrichtsverfahren ja den Anspruch, Schülerinnen und Schüler zu einem sinnvollen, wenn auch gelenkten Dialog zu motivieren. Insbesondere für Unterrichtsinhalte, die verständnisorientiertes Lernen erfordern, also etwa beim Thema „Beweisen, Begründen, Argumentieren“, sollte dieser Anspruch eingelöst werden. Entsprechend ist es ein Ziel der hier dargestellten Untersuchung, zu beschreiben, wie Beweise im gymnasialen Mathematikunterricht behandelt werden.

Dabei wurde zum einen untersucht, welche inhaltlichen Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen auftraten und wie hoch dabei jeweils die inhaltliche Beteiligung der Schüler war, zum anderen wurde das Anforderungsni-

veau der Lehrerfragen bzw. -aufforderungen bestimmt und betrachtet, auf welche Weise die Schülerinnen und Schüler antworteten.

1.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

Wenn in der Mathematik Beweise entwickelt werden, durchläuft das Arbeiten und Denken in der Regel eine Reihe von Phasen eines längeren Prozesses. Ein Modell für solche Entwicklungs- und Auffindungsprozesse von Beweisen durch Experten stammt von Boero (1999). Nach diesem Beweisentwicklungsmodell folgt auf eine erste, explorative Phase der Entwicklung einer Behauptung und der Identifikation möglicher Argumente eine zweite Phase, während derer eine Behauptung nach formalen Konventionen formuliert wird. Danach folgen zwei weitere explorative Phasen, in denen die Hypothese erkundet, mögliche Argumentverknüpfungen gesucht, schließlich Argumente ausgewählt und in einer Kette von Deduktionsschlüssen verknüpft werden. Die Organisation der Argumente in einem Beweis, der mathematischen Standards formalsprachlicher Formulierung, wie sie etwa in Publikationen verlangt wird, entspricht, sowie die Annäherung an einen formalen Beweis stellen erst die letzten Phasen dar. Diese von Boero (1999) beschriebenen Beweisentwicklungsphasen werden von ihm weniger als lineare Abfolge verstanden, sondern sind aufgrund möglicher Rücksprünge und Wiederholungen eher als Elemente inhaltlichen Arbeitens an einem Beweisproblem anzusehen.

Wenn dieses Beweisprozessmodell für die Arbeit von Experten auf den Mathematikunterricht und dessen Beobachtung angewendet werden soll, ist es um Aspekte zu ergänzen, die der speziellen Situation im Klassenraum Rechnung tragen. Folgende Gesichtspunkte sind zu berücksichtigen:

- Im Mathematikunterricht sind am Beweisfindungsprozess Lernende beteiligt, die keine Experten sind. Daraus ergibt sich die grundsätzliche Implikation, dass ihnen gegenüber Transparenz hergestellt werden muss, worin das gestellte Problem besteht. Lernende verfügen anders als Experten zunächst nicht über notwendiges beweisspezifisches Methodenwissen (vgl. Heinze & Reiss, 2003).
- Im Mathematikunterricht ist der Sinn einer Aussage nicht immer unmittelbar einsichtig. Es muss also von den Lernenden ein mit dem Beweisproblem verbundenes Verständnis erarbeitet werden. Dies hat zur Folge, dass für alle Beteiligten geklärt werden muss, welche Aussage zu beweisen ist und was der Ausgangs- bzw. der Zielzustand des zu lösenden Problems ist. Um für alle Beteiligten die Voraussetzungen für ein solches Verständnis zu schaffen, ist ferner auch Transparenz im Hinblick auf die Darstellung des Lösungsweges notwendig (vgl. Schoenfeld, 1985; auch Polya, 1949).

Für das Entwickeln von Beweisen im Mathematikunterricht werden also weitere inhaltliche Elemente, die expertentypische Tätigkeiten des Beweisens nach Boero gewissermaßen einrahmen, erforderlich. Zunächst muss in

der Regel ein gemeinsam zu bearbeitendes Beweisproblem zwischen den am Unterricht Beteiligten festgelegt werden, dessen Lösungsbedürftigkeit von den Lernenden erkannt wird. Den Schülern gegenüber muss ferner Transparenz hergestellt werden, welche Funktionen bestimmte Argumentationsweisen haben, welches Wissen und welche Verfahren in Beweisen benutzt werden dürfen. Solche Aspekte des beweispezifischen Methodenwissens (Heinze & Reiss, 2003), das Experten bereits beherrschen, müssen den Lernenden verfügbar gemacht werden, sofern noch nicht davon ausgegangen werden kann, dass alle Schüler auf dieses Wissen bereits zurückgreifen können.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich eine Reihe so genannter „inhaltlicher Elemente der Behandlung von Beweisen im Mathematikunterricht“, d.h. auf den Beweis bezogener Arbeitsphasen, die aus dem Modell von Boero (1999) unter Einbeziehung der oben geschilderten Erfordernisse der Unterrichtssituation abgeleitet wurden und teilweise auch in den Arbeiten von Stein (1986) und Steinhöfel & Reichold (1971) diskutiert werden.

Diese inhaltlichen Elemente betreffen einen Bereich der *Beweisfindung* und einen Bereich der *Beweisrahmung im Unterricht*. Wir konzentrieren uns im Folgenden auf sieben beweisrahmende inhaltliche Elemente, die vermutlich auch eine wichtige Rolle für das Abschneiden der Schüler in Tests spielen (für eine genauere Beschreibung der inhaltlichen Elemente vgl. Kuntze, Rechner & Reiss, i.V.):

- Voraussetzungen sammeln/bereitstellen
- Behauptung(en) formulieren
- Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutieren
- Entscheidung über den eingeschlagenen Beweisweg treffen
- Beweisredaktion
- Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis, Diskussion des Beweises
- Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen

Für diese sieben inhaltlichen Elemente soll untersucht werden, ob sie in den Erarbeitungsprozessen von Beweisen im Unterricht (im Folgenden kurz „Unterrichtsbeweise“ genannt) inhaltlich geleistet werden und wie groß der jeweilige Schülerbeitrag im Unterrichtsgespräch ist.

Die Beteiligung der Schülerinnen und Schüler bezieht sich dabei nicht auf eine linguistische Sichtweise oder auf das Erfassen von Zeitanteilen, sondern auf ihre inhaltlichen Beiträge zu den verschiedenen inhaltlichen Elementen. Untersucht wird, welchen Anteil der Lehrer von Schülern erfragt bzw. welcher Anteil von den Schülern tatsächlich beigetragen wird.

1.2 Anforderungsniveau der Lehrerfragen und -aufforderungen

Bei der Erarbeitung von Beweisen im Mathematikunterricht stellen sich eine Reihe von spezifischen Problemen. Abgesehen davon, dass Beweisauf-

gaben sich oft bereits aufgrund der Anzahl der zur Lösung notwendigen Schritte durch einen hohen Schwierigkeitsgrad auszeichnen, müssen wiederholt Soll-Ist-Vergleiche durchgeführt werden, die auf ganz unterschiedliches Wissen zurückgreifen müssen. Die Reflektion zur Argumentation zugelassener Tatsachen und Argumentationsmittel, wie etwa anwendbarer, bereits bewiesener Sätze, sowie eine Wissensbasis auf der Ebene beweis-spezifischer Methodenkompetenz (vgl. Heinze & Reiss, 2003) können beispielsweise in solche Soll-Ist-Vergleiche zwischen dem Stand der Argumentation und ihrem Ziel einfließen. Vor diesem Hintergrund ist es von Interesse, wie Lehrer in ihren Fragen und Aufforderungen an die Schüler Impulse geben und wie die Schüler auf diese Impulse reagieren. Da es darum geht, eine komplexe Problemstellung transparent zu machen, ohne den Schwierigkeitsgrad des Problems durch zu starke Vorgaben zu trivialisieren, scheint insbesondere das vom Lehrer vorgegebene Anforderungsniveau eine wichtige Rolle zu spielen.

In einem gewissen Zusammenhang mit dem Anforderungsniveau von Fragen und Aufforderungen des Lehrers steht auch die kognitive Aktivierung der Schüler. Clausen, Reusser & Klieme (2003) konnten in ihrer Videostudie vier Grunddimensionen von Unterrichtsqualität, nämlich Instruktionseffizienz, Klarheit und Strukturiertheit, Schülerorientierung, sowie kognitive Aktivierung unterscheiden. Besonders der letztere Bereich dürfte für die Erklärung von Klassenunterschieden in der Beweis- und Argumentationskompetenz mit in Frage kommen, sofern in den drei erstgenannten Bereichen keine gravierenden Beeinträchtigungen der Lernprozesse im Unterricht auftreten.

Es liegt nahe, ein sehr niedriges und ein sehr hohes Anforderungsniveau von Lehrerfragen und -aufforderungen jeweils mit einer eher niedrigen kognitiven Aktivierung zu assoziieren, während ein mittleres Anforderungsniveau sich im Sinne einer optimalen Passung als besonders kognitiv aktivierend auswirken dürfte (vgl. Klieme, Schümer & Knoll, 2001). Zu beachten ist jedoch, dass es sich bei dem beobachteten Unterrichtsgeschehen lediglich um das vom Lehrer orchestrierte „Bühnengeschehen“, d.h. um eine Oberflächenstruktur des Unterrichts handelt. Denkprozesse und kognitive Aktivierung von Schülern, die sich nicht am Unterrichtsdiskurs beteiligen oder die mit ihren eventuellen Wortmeldungen nicht zum Zuge kommen, bleiben daher in der Regel ausgeblendet.

Insgesamt erscheint der Stand der Forschung es noch nicht zu erlauben, zu prüfende Hypothesen zur kognitiven Aktivierung im Zusammenhang mit der Behandlung von Beweisen im Unterricht abzuleiten. Insofern hat der in dieser Untersuchung vorgenommene, an Forschungsfragen orientierte Vergleich zwischen Klassen einen explorativen Charakter und dient der Generierung von Hypothesen. Daher werden auch flankierende Beobachtungen wie etwa das Feststellen der durchschnittlichen Anzahl von Fragen pro Mi-

nute angestellt, die auf das vom Lehrer vorgegebene Interaktionstempo hindeuten und in einem Übergangsbereich hin zur Grunddimension „Schülerorientierung“ (Klieme, 2002) zusätzlichen Aufschluss über die Qualität des Unterrichtsdiskurses geben können.

1.3 Forschungsfragen

Aus den dargestellten Überlegungen ergeben sich die folgenden Forschungsfragen:

1. Welche inhaltlichen Elemente der Behandlung von Beweisen werden in den Unterrichtsbeweisen in den jeweiligen Klassen geleistet oder teilweise geleistet und wie groß ist der Grad der Beteiligung der Schüler in den einzelnen Klassen?
2. Welches Anforderungsniveau haben Fragen und Aufforderungen der jeweiligen Lehrer und in welcher Weise werden die Lehrerfragen und -aufforderungen von den Schülern der einzelnen Klassen im Unterrichtsgespräch beantwortet?

2. Beschreibung der Studie

Grundlage der Untersuchung sind 19 videografierte Unterrichtsstunden der 8. Jahrgangsstufe aus 8 Gymnasialklassen, die von 7 Lehrern unterrichtet wurden. Bei den videografierten Unterrichtsstunden handelte es sich jeweils um den Anfangsunterricht zum Beweisen in der Geometrie. Der Unterricht wurde in 26 „Beweiseinheiten“ eingeteilt, die von unterschiedlicher zeitlicher Länge waren, aber bei denen vergleichbare inhaltliche Erarbeitungsschritte zu erwarten waren. Jede „Beweiseinheit“ beinhaltet einen im Unterricht abgeschlossenen Beweis. Die Lehrer wurden ohne weitere Instruktion gefragt, ob sie dazu bereit seien, in Unterrichtsstunden zum Beweisen aufgezeichnet zu werden. Bei den Unterrichtsvideos darf also davon ausgegangen werden, dass es sich weitgehend um „Normalunterricht“ handelt. Zur Kontrolle wurde von den Schülern nach der Unterrichtsstunde ein Fragebogen ausgefüllt, der in der Gruppe von Andreas Helmke an der Universität Landau entwickelt wurde und Items wie etwa „Die Mathestunde heute war (abgesehen von der Videoaufnahme) ... genau so wie andere Mathestunden auch / anders als sonst, weil ...“ enthielt.

Von den Klassen, deren Unterricht aufgezeichnet wurde, liegen Daten von Leistungstests der Beweis- und Argumentationskompetenz vor, die in Tests vor und nach der Unterrichtseinheit erhoben wurden (vgl. Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Die Tests sind rasch-skalierbar, so dass sich Items und Probanden auf einer gemeinsamen Dimension anordnen lassen. Die in die Videostudie einbezogenen Klassen wiesen dabei untereinander relativ ähnliche durchschnittliche Ergebnisse im Vortest auf, weshalb von ähnlichen Lernvoraussetzungen der Klassen ausgegangen wird. Der vom Vortest verschiedene Nachtest erlaubt es, über Residuenwerte zu ermitteln, ob sich die Beweis- und Argumentationskompetenz der Schülerinnen und Schüler einer

Klasse bezüglich der Gesamtzahl aller Probanden über- oder unterdurchschnittlich entwickelte.

Die Unterrichtsstunden wurden transskribiert. Auf der Basis der Videos und der Transskripte wurden die Unterrichtsmitschnitte von zwei geschulten Beobachtern unabhängig voneinander kodiert. Abweichende Beobachterurteile, bei denen bei einer erneuten Betrachtung der Videos ein Konsens der Beobachter hergestellt werden musste, wurden jeweils erfasst und bei der Ermittlung von Inter-Rater-Reliabilities als Abweichungen gewertet. Die so errechneten Inter-Rater-Reliabilities liegen für alle Teile der Untersuchung in einem akzeptablen Bereich.

Im Folgenden werden die Kategoriensysteme, nach denen die Unterrichtsvideos ausgewertet wurden, kurz vorgestellt (vgl. Kuntze, 2003).

2.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

Für die Beweiseinheiten wurde untersucht, inwieweit inhaltliche Elemente der Behandlung von Beweisen im Mathematikunterricht geleistet wurden. Es wurden dazu die Kategorien „nicht geleistet“, „teilweise geleistet“ und „vollständig geleistet“ verwendet.

Der Anteil an den in der jeweiligen Beweiseinheit geleisteten inhaltlichen Elementen, der auf Beiträge der Schüler entfällt, wurde jeweils einer der folgenden fünf Kategorien „1: im Wesentlichen keine Beiträge der Schüler“, „2: Beiträge der Schüler, die deutlich unter dem Anteil des Lehrerbeitrags liegen“, „3: Beiträge der Schüler, die mit dem Anteil des Lehrerbeitrags vergleichbar sind“, „4: Beiträge der Schüler, die deutlich über dem Anteil des Lehrerbeitrags liegen“ oder „5: im Wesentlichen keine Beiträge des Lehrers“ zugeordnet. Die geschulten Rater orientierten sich bei dieser Beurteilung daran, ob entsprechende Anteile im Unterrichtsgespräch inhaltlich vom Lehrer oder von den Schülern geleistet wurden.

In der Arbeitsgruppe um Klieme und Clausen haben sich hochinferente Ratingverfahren bei der Identifizierung von „Grunddimensionen der Unterrichtsqualität“ bewährt (Klieme 2002, vgl. auch Gruehn, 2000). Einschätzungen der Beobachter zu Faktoren wie Interaktionstempo, Leistungsdruck, anspruchsvolles Üben etc. wurden mit Fragebögen erfasst, die die Beobachter nach dem Betrachten des Unterrichtsvideos ausfüllten. Eine solches hochinferentes Ratingverfahren wurde für die Untersuchung zu den inhaltlichen Elementen bei der Erarbeitung von Beweisen gewählt. Urteile der Rater, die eines Konsensverfahrens für eine gemeinsame Beurteilung bedurften, wurden wie oben beschrieben protokolliert und in der Berechnung der Inter-Rater-Reliabilities als Abweichungen gewertet.

2.2 Anforderungsniveau der Lehrerfragen und -aufforderungen

Eine detailgenauere Auswertung der Unterrichtsvideos, die die summarischen Urteile bei der Einschätzung der geleisteten inhaltlichen Elemente ergänzt, wurde bei der Untersuchung des Anforderungsniveaus der Lehrer-

fragen bzw. -aufforderungen durchgeführt. Hier wurden inhaltliche Fragen, die der Lehrer den Schülern stellt, und die Art ihrer Beantwortung durch die Schülerinnen und Schüler einzeln erfasst und beurteilt. Dabei wurde versucht, ein möglichst niedrig-inferentes Verfahren zu wählen.

Die Erfassung des jeweiligen Anforderungsniveaus der Lehrerfragen bzw. Lehreraufforderungen basiert auf einem Stufenmodell von Beweis- und Argumentationskompetenz (vgl. Reiss, 2002; Reiss, Hellmich & Thomas, 2002). Neben der Ausrichtung an der inhaltlichen Einstufung der Itemschwierigkeit der verwendeten Beweiskompetenztests wurden auch Überlegungen von Neubrand (2002) zur Beurteilung von Aufgaben nach den in ihnen angesprochenen Wissenseinheiten in die Entwicklung des Kategoriensystems einbezogen. Während Neubrand einzelne Lehrerfragen und Aufforderungen jedoch zusammenfasst, werden diese Bestandteile des Unterrichtsdiskurses in dieser Untersuchung einzeln ausgewertet. Entsprechend dem Stufenmodell von Beweis- und Argumentationskompetenz spielte bei der Beurteilung des Anforderungsniveaus der Lehrerfragen die Anzahl der zur Antwort notwendigen Gedankenschritte eine zentrale Rolle.

Jede der Lehrerfragen bzw. -aufforderungen wurde in eine der vier Kategorien „(1) leicht“, „(2) mittel“, „(3) schwer“ oder „(0) sonstiges“ eingestuft. Eine genauere Beschreibung dieser Kategorien, die sich wesentlich an der Anzahl der zur Beantwortung notwendigen Gedankenschritte orientieren, findet sich in Kuntze, Rechner & Reiss (i.V.).

Die Art der Beantwortung der Lehrerfragen bzw. Lehreraufforderungen durch die Schüler wurde mit den Kategorien „(0) keine Antwort“, „(1) fehlerhafte Antwort“, „(2) nicht vollständige, teilweise Antwort“ und „(3) korrekte und vollständige Antwort“ erfasst.

3. Ergebnisse

Bei dem beobachteten Unterricht handelte es sich fast ausschließlich um fragend-entwickelnden Frontalunterricht. Die Ausnahme bilden zwei Phasen von Gruppen- bzw. Partnerarbeit, in denen Schüler Beweisaufgaben bearbeiteten. Sonstige Phasen von Einzel- und Partnerarbeit waren lediglich beim Zeichnen bzw. Übertragen geometrischer Figuren zu beobachten. Auch die Schüleräußerungen in den Kontrollfragebögen ließen darauf schließen, dass der fragend-entwickelnde Unterricht in der beobachteten Form tatsächlich von den Schülern als „Normalunterricht“ empfunden wurde.

3.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

In Tabelle 1 sind über alle Klassen kumulierte Ergebnisse der Auswertung zusammengestellt. Für die inhaltlichen Elemente „Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutieren“, „Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis/Diskussion des Beweises“ und „Bemerkungen zu allgemeinem Wissen

über das mathematische Beweisen“ wurden die Kategorien „vollständig geleistet“ und „teilweise geleistet“ zusammengefasst.

Für beweisrahmende inhaltliche Elemente ergibt sich insgesamt das folgende Bild (vgl. Tabelle 1):

- Das inhaltliche Element „Voraussetzungen sammeln / bereitstellen“ wird meist vollständig geleistet, wobei allerdings eine explorative Diskussion, unter welchen Bedingungen eine Behauptung gültig ist, bzw. unter welchen nicht, bzw. ein Öffnen von Aufgaben nicht beobachtet werden konnte.
Bei drei Beweiseinheiten wurden die Voraussetzungen nicht explizit und vollständig dargestellt.
- Das inhaltliche Element „Behauptung(en) formulieren“ wird in aller Regel geleistet. Hier sei angemerkt, dass Beiträge der Schüler zum Erarbeiten der Behauptung, etwa durch ein Entdeckenlassen von Eigenschaften geometrischer Figuren durch die Schüler, in einer knappen Hälfte der Fälle festgestellt werden konnten. Oft blieb es jedoch bei einem bloßen Erfragen von Eigenschaften, die vom Lehrer vorher evident gemacht worden waren.

Tabelle 1: Inwiefern werden inhaltliche Elemente in den 26 Beweiseinheiten geleistet?

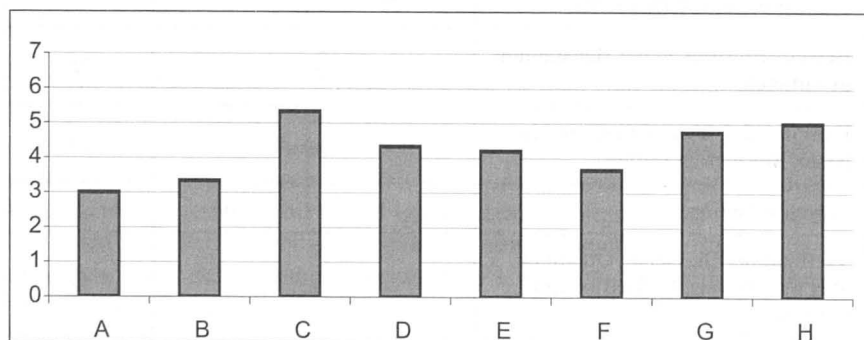
Inhaltliches Element	Anzahl der Beweiseinheiten		
	Inh. Element vollständig geleistet	Inh. Element teilweise geleistet	Inh. Element nicht geleistet
Voraussetzungen sammeln/ bereitstellen	23	3	-
Behauptung(en) formulieren	25	1	-
Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutieren	8		18
Entscheidung über den eingeschlagenen Beweisweg treffen	5	7	14
Beweisredaktion	17	6	3
Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis, Diskussion des Beweises	8		18
Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen	10		16

- Nur bei etwas weniger als einem Drittel der Beweiseinheiten wird die Beweisbedürftigkeit der Behauptung diskutiert.

- Eine „Entscheidung über den eingeschlagenen Beweisweg“ wurde nur relativ selten, d.h. in weniger als einem Fünftel der Fälle, deutlich thematisiert. In der Mehrheit der Beweiseinheiten wurden keine Alternativen angesprochen.
- Das inhaltliche Element „Beweisredaktion“, d.h. das Formulieren und Aufschreiben des erarbeiteten Beweises, wurde mehrheitlich vollständig geleistet. Meist dominierte der Lehrer das schriftliche Formulieren des erarbeiteten Beweises: Nur in sechs Fällen erreicht die Beteiligung der Schüler mindestens das Ausmaß der Lehrerbeiträge.
- Ein Vorkommen von Anteilen des inhaltlichen Elements „Verifikation/Rückschau/Überblick über den Beweis, Diskussion des Beweises“ konnte nur in weniger als einem Drittel der Beweiseinheiten überhaupt beobachtet werden.
- Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das mathematische Beweisen fanden sich in einer Mehrzahl der Beweiseinheiten nicht. In der Kategorie „teilweise bis vollständig geleistet“ sind auch Fälle enthalten, in denen beispielsweise nur eine kurze Bemerkung zur Nichtzulässigkeit des Messens gemacht wurde. Bis auf zwei Fälle stammten die Bemerkungen zu allgemeinem beweisbezogenen Wissen im Wesentlichen vom Lehrer.

Bereits bei der Anzahl durchschnittlich in den einzelnen Klassen geleisteter inhaltlicher Elemente ergeben sich deutliche Unterschiede. Einen Anhaltspunkt dafür, wie viele der 7 möglichen (in der Auswertung betrachteten) inhaltlichen Elemente in den verschiedenen Klassen jeweils durchschnittlich pro Beweiseinheit geleistet bzw. teilweise geleistet wurden, gibt Abbildung 1.

Abbildung 1: Durchschnittliche Anzahl geleisteter inhaltlicher Elemente pro Beweiseinheit



In Abbildung 1 wird deutlich, dass die drei Klassen C, G und H die Klassen mit der größten durchschnittlichen Anzahl an geleisteten bzw. teilweise geleisteten inhaltlichen Elementen darstellen. In diesen Klassen werden durchschnittlich je etwa fünf verschiedene inhaltliche Elemente pro Beweiseinheit geleistet bzw. teilweise geleistet.

Betrachtet man die Beiträge der Schüler zu den inhaltlichen Elementen, so ergeben sich noch weitaus stärkere Unterschiede zwischen den einzelnen Klassen: Es zeigt sich, dass sich die inhaltlichen Elemente, bei denen substantielle Beiträge der Schüler gefunden wurden, bei zwei Lehrern bzw. in zwei Klassen konzentrieren. Einen Eindruck von der Größenordnung dieses Befundes gibt Tabelle 2.

In Tabelle 2 sind in der zweiten Spalte die Anzahlen von Beweiseinheiten angegeben, die auf bestimmte Klassen entfallen. Zu jeder Beweiseinheit gäbe es 7 mögliche (in der Auswertung betrachtete) inhaltliche Elemente. Insgesamt ergäbe sich beispielsweise für 26 Beweiseinheiten eine fiktiv mögliche Gesamtanzahl von 182 inhaltlichen Elementen (26 Beweiseinheiten x 7 inhaltliche Elemente). Die entsprechenden klassenbezogenen Werte enthält die dritte Spalte von Tabelle 2.

In der vierten Spalte wurden alle inhaltlichen Elemente für die jeweiligen Klassen addiert, für die wesentliche Beiträge der Schüler festgestellt wurden. In der letzten Spalte finden sich die Anzahlen inhaltlicher Elemente, bei denen der Beitrag der Schüler mindestens mit dem Lehreranteil vergleichbar war.

Tabelle 2: Inhaltliche Elemente mit Schülerbeiträgen - große Klassenunterschiede

	Anzahl der Beweiseinheiten	Anzahl rechnerisch möglicher inhaltlicher Elemente	Geleistete/teilweise geleistete inh. Elemente mit Beiträgen der Schüler (Kategorien 2 bis 5)	Geleistete/teilweise geleistete inh. Elemente mit substantiellen Beiträgen der Schüler (Kategorien 3 bis 5)
Klassen A,B,D,E,F,H zusammen genommen	19	133	19	3
Klasse C	3	21	12	9
Klasse G	4	28	11	8

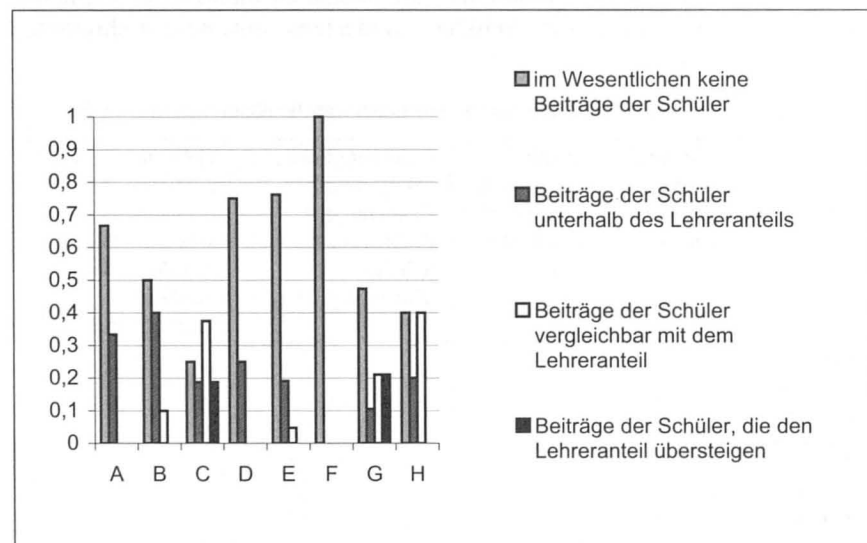
Es finden sich nach Tabelle 2 also in 7 Beweiseinheiten mehr inhaltliche Elemente mit Schülerbeteiligung als in 19 anderen Beweiseinheiten. In den sechs Klassen A, B, D, E, F, H ist substantielle Schülerbeteiligung an den betrachteten inhaltlichen Elementen die Ausnahme: Nur in 3 von insgesamt möglichen 133 inhaltlichen Elementen erreicht der Schülerbeitrag das Ausmaß des inhaltlichen Beitrags des Lehrers. Demgegenüber weisen die

Klassen C und G einen größeren Grad an Schülerbeteiligung auf: In Klasse C wurde bei 9 von 21 möglichen inhaltlichen Elementen ein dem Lehrerbeitrag vergleichbarer Schüleranteil festgestellt, in Klasse G bei 8 von 28 möglichen inhaltlichen Elementen.

Diese Zusammenhänge spiegeln sich auch in Abbildung 2 wider. Hier wurde zur Übersicht die Anzahl aller je Klasse beobachteten inhaltlichen Elemente mit dem jeweiligen Schüleranteil dividiert durch die Gesamtanzahl der in der jeweiligen Klasse geleisteten inhaltlichen Elemente aufgetragen. Somit ergeben sich in der Übersicht in Abbildung 2 indikatorenartige Anteilswerte zwischen 0 und 1, die alle betrachteten inhaltlichen Elemente aller Beweiseinheiten überspannen.

Beispielsweise konnten für 40% aller in Klasse H geleisteten bzw. teilweise geleisteten inhaltlichen Elemente Schülerbeiträge verzeichnet werden, die mit dem Lehreranteil vergleichbar waren.

Abbildung 2: Schülerbeitrag an inhaltlichen Elementen nach Klassen



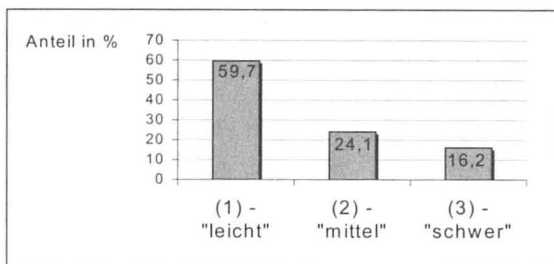
Die Klassen C und G fallen dadurch auf, dass vergleichsweise häufiger substantielle Beiträge der Schüler beobachtet werden konnten: Beide Klassen weisen etwa 20% an Elementen mit einem den Lehreranteil übertreffenden Schülerbeitrag auf. Zu mindestens einem weiteren Fünftel der geleisteten oder teilweise geleisteten inhaltlichen Elemente lieferten die Schüler Beiträge, die mit dem Lehreranteil vergleichbar waren.

Bei einem Vergleich dieser Daten mit denen in Abbildung 1 zeichnet sich ab, dass in Klassen mit stärkerer Beteiligung der Schülerinnen und Schüler die verschiedenen inhaltlichen Elemente vermehrt auftraten.

3.2 Anforderungsniveau der Lehrerfragen und -aufforderungen

Ausgewertet wurden insgesamt knapp über 1000 Lehrerfragen bzw. -aufforderungen, die während 788 Minuten, d.h. 13 Stunden 8 Minuten, innerhalb der 26 Beweiseinheiten gestellt wurden. Fasst man alle Klassen zusammen, so ergibt sich daraus rechnerisch eine durchschnittliche „Frage-Frequenz“ von ca. 1,3 Fragen pro Minute.

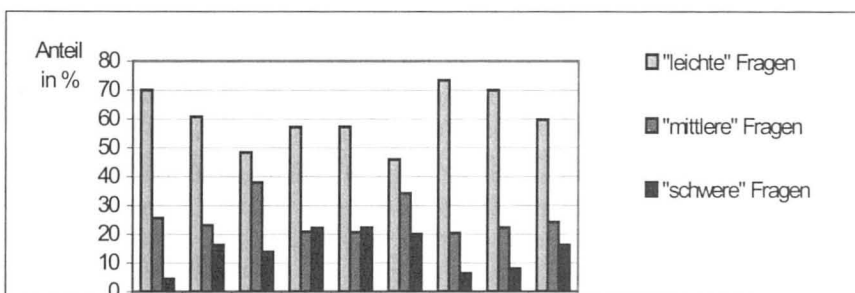
Abbildung 3: Anforderungsniveau von Fragen und Aufforderungen der Lehrer



Die Lehrerfragen bzw. -aufforderungen verteilten sich wie in Abbildung 3 dargestellt anteilig auf die Kategorien des Anforderungsniveaus „(1) leicht“, „(2) mittel“, „(3) schwer“.

Es fällt der hohe Anteil von knapp 60% an Fragen auf, die nur einen Gedankenschritt oder etwa die Nennung eines Stichwortes zur Beantwortung erforderten und wenig Variation in der Art der Beantwortung zuließen.

Abbildung 4: Klassenweise Anteile der Anforderungsniveaus von Lehrerfragen



Hinsichtlich der Anforderungsniveaus der vom Lehrer formulierten Fragen und Aufforderungen ergeben sich größere Klassenunterschiede. Die jeweiligen, auf Klassen bezogenen prozentualen Anteile der Anforderungsniveaus „(1) leicht“, „(2) mittel“, „(3) schwer“ sind in Abbildung 4 zusammengestellt.

Versucht man auf der Basis dieser Daten Gruppen von Klassen zu bilden, so ergibt sich in etwa das folgende Bild:

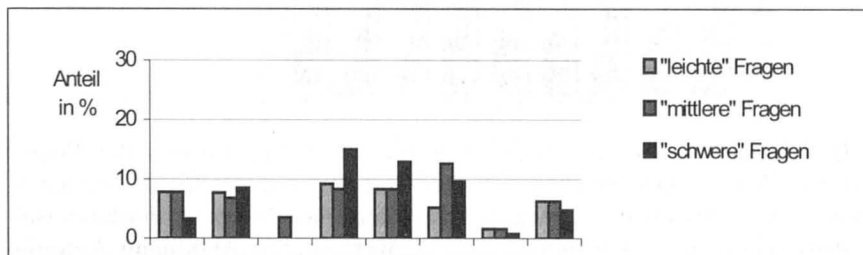
- Die Klassen D und E, die vom selben Lehrer unterrichtet wurden, weisen eine große Übereinstimmung in ihrem Profil auf. Ein Merkmal dieser

- Gruppe ist es, dass anders als im Durchschnitt die Anzahl der schweren Fragen (Kategorie 3) die Anzahl der mittleren Fragen (Kategorie 2) übersteigt.
- Die Klassen A, G und H weisen weit unterdurchschnittliche Anteile schwerer Fragen (Kategorie 3) auf, was mit einem überdurchschnittlichen Anteil leichter Fragen (Kategorie 1) einhergeht.
 - Merkmal der Klassen C und F ist es, dass der Anteil leichter Fragen (Kategorie 1) weit unterdurchschnittlich ist, während Fragen mittleren Anforderungsniveaus (Kategorie 2) einen deutlich überdurchschnittlichen Anteilswert zeigen. Zwischen den beiden Klassen variiert jedoch der Anteil schwerer Fragen (Kategorie 3) etwas.
 - Die Verteilung von Klasse B weicht kaum von den Durchschnittswerten der Gesamtstichprobe ab.

Davon abweichende Klassenunterschiede werden deutlich, wenn die Art der Beantwortung der Lehrerfragen bzw. -aufforderungen mit in die Betrachtung einbezogen werden. Von besonderem Interesse dürften dabei einerseits die Anteile der vollständig beantworteten Lehrerfragen und -aufforderungen sein, da sie mögliche Rückschlüsse darauf zulassen, wie sich inhaltliches Fortschreiten bei der Erarbeitung von Beweisen im Dialog mit den Schülerinnen und Schülern gestaltet. Andererseits könnte die Betrachtung der Anteile nicht beantworteter Fragen als Anzeichen für Brüche im Unterrichtsgespräch oder dysfunktionale Fragetechniken des Lehrers dienen.

Hinweise auf diese beiden Bereiche geben die Daten in Abbildung 5 und 6. In den Diagrammen wurden klassenweise einzelne Kombinationen von Anforderungsniveaus und Arten der Beantwortung dargestellt. Abbildung 5 betrifft die von den Schülern nicht beantworteten Fragen bzw. Aufforderungen des Lehrers, während Abbildung 6 die Anteile vollständig beantworteter Fragen bzw. Aufforderungen wiedergibt.

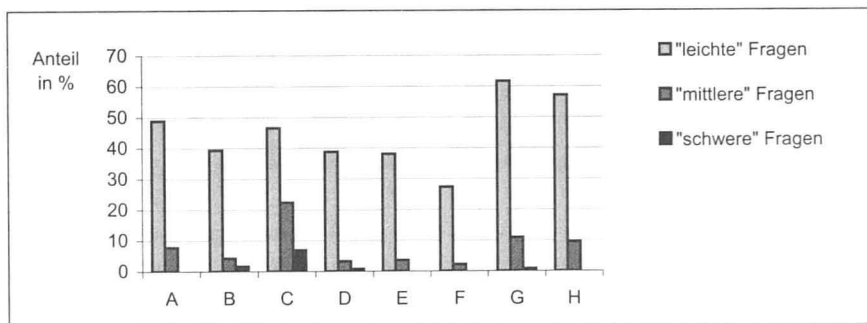
Abbildung 5: Anteile nicht beantworteter Fragen und Aufforderungen nach Klassen



Diese Daten sind in Zusammenhang zu den Anteilen in Abbildung 4 zu sehen, da die Anzahl gestellter Fragen einer bestimmten Kategorie einen Einfluss auf die Anzahl korrekt beantworteter oder nicht beantworteter Fragen dieser Kategorie hat.

In Abbildung 5 fällt der geringe Anteil nicht beantworteter Fragen in den Klassen C und G im Vergleich zu den anderen Klassen auf. Insbesondere können nun Unterschiede zwischen den Klassen C und F, die auf der Basis des Diagramms in Abbildung 4 ein ähnliches Profil aufwiesen, festgestellt werden. Auch Klasse G scheint sich nun von den Klassen A und H zu unterscheiden.

Abbildung 6: Anteile vollständig beantworteter Fragen und Aufforderungen nach Klassen



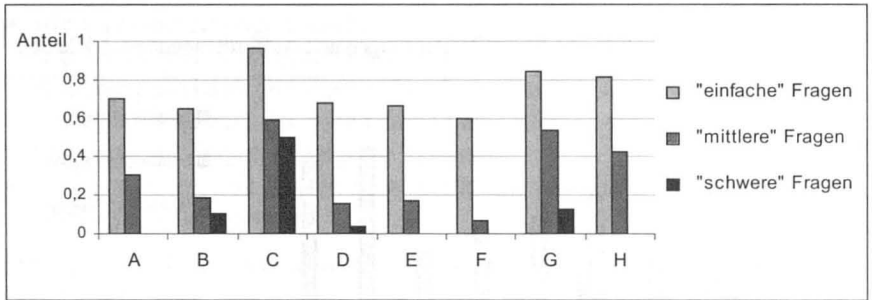
Die Aufstellung zu den vollständig beantworteten Fragen in Abbildung 6 zeigt ebenfalls große Abweichungen zwischen den Klassen. Kumuliert man die Säulen, so stellt man eine Bandbreite von 29,6% vollständig beantworteter Fragen bei Klasse F bis hin zu 73,4% vollständig beantworteter Fragen in Klasse G oder 75,9% in Klasse C fest. Versucht man angesichts der großen Unterschiede, die Klassen nach dem Anteil vollständig beantworteter Fragen zu Gruppen zusammenzufassen, so könnten die Klassen B (45,3%), D (42,9%) und E (41,7%) zu einer mittleren Gruppe gerechnet werden. Klasse A (56,7%) und insbesondere Klasse H (66,6%) heben sich von dieser Gruppe in positiver, Klasse F (29,6%) in negativer Richtung ab. Die „Spitzengruppe“ bilden Klasse G (73,4%) und Klasse C (75,9%).

Zwischen den Klassen C und G besteht ein auffälliger Unterschied im Anforderungsprofil der vollständig beantworteten Fragen: Vergleichsweise hohe Anteile entfallen in Klasse C auf Fragen mittleren und hohen Anforderungsniveaus. Diese Fragen und ihre Antworten tragen möglicherweise einen wesentlichen Teil zum inhaltlichen „Vorankommen“ bei der Erarbeitung von Beweisen in dieser Klasse bei.

Es sei auch hier festgehalten, dass sich die Klassen C bzw. G und auch H in Abbildung 6 deutlich von Klassen mit ähnlichen Profilen beim Anforderungsniveau der Lehrerfragen und -aufforderungen (vgl. Abbildung 4) unterscheiden. In den Klassen C, G und H sind die Schüler erfolgreicher bei Beantwortung von Fragen, was auch durch die Daten in Abbildung 7 untermauert wird.

In Abbildung 7 werden die Anteile vollständig beantworteter Fragen bezogen auf die Gesamtzahl der auf dem jeweiligen Anforderungsniveau gestellten Fragen bzw. Aufforderungen aufgeführt.

Abbildung 7: Anteile vollständig beantworteter Fragen bezogen auf die Zahl jeweils gestellter Fragen



Die Unterschiede zwischen den Klassen scheinen sich in dieser Darstellung noch einmal verstärkt zu zeigen. In den Klassen C und G werden Fragen mittleren Anforderungsniveaus anteilmäßig fast genauso oft vollständig beantwortet wie einfache Fragen etwa in den Klassen B, D, E, F. Der Anteil vollständig beantworteter Fragen des höchsten Anforderungsniveaus (Kategorie „(3) schwer“) in Klasse C übertrifft den Anteil vollständig beantworteter Fragen mittleren Anforderungsniveaus in den Klassen A, B, D, E, F, H meist deutlich.

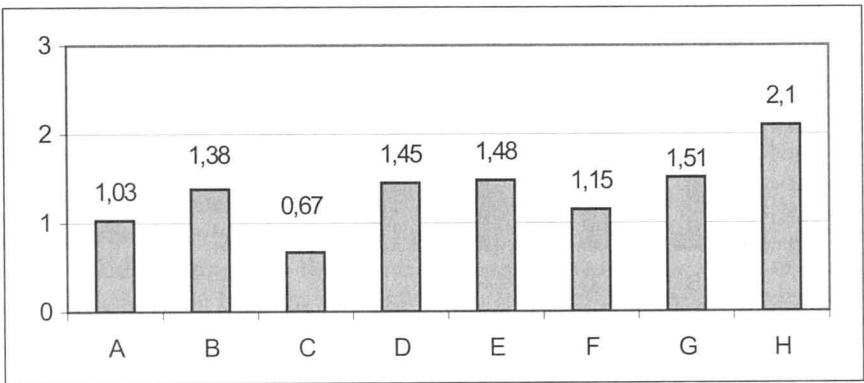
Fasst man die Ergebnisse in Abbildung 7 als eine Art Indikator für gute Passung der Fragen und Aufforderungen im Unterrichtsgespräch auf, so erhält man über den gemessenen Anteil vollständig beantworteter Fragen pro Klasse je nach Anforderungsniveau recht deutliche Hinweise auf diese Komponente von Unterrichtsqualität.

„Frage-Frequenz“

Einen möglichen Anhaltspunkt für das Antwortverhalten der Schüler könnte aus einer klassenweisen Auswertung der durchschnittlichen „Frage-Frequenz“, d.h. der mittleren Anzahl der Fragen pro Minute, gewonnen werden. In Abbildung 8 sind daher diese Werte für die einzelnen Klassen dargestellt.

Zu Klasse C ist anzumerken, dass hier eine Gruppenarbeit der Schüler rechnerisch wirksam wird. Ohne die Gruppenarbeit ergäbe sich immer noch eine Frequenz von nur 0,95 Fragen pro Minute, was weiterhin die geringste vorkommende Frequenz darstellt. Der Unterschied zu Klasse G entspräche dann beispielsweise zusätzlichen 34 Fragen in 60 Minuten, der zu Klasse A (geringster Abstand) zusätzlichen 5 Fragen in 60 Minuten und der zu Klasse F (zu Klasse C ähnliches Profil in Abbildung 4) zusätzlichen 12 Fragen in 60 Minuten.

Abbildung 8: Frage-Frequenz nach Klassen



„Figuren der Fragetechnik“

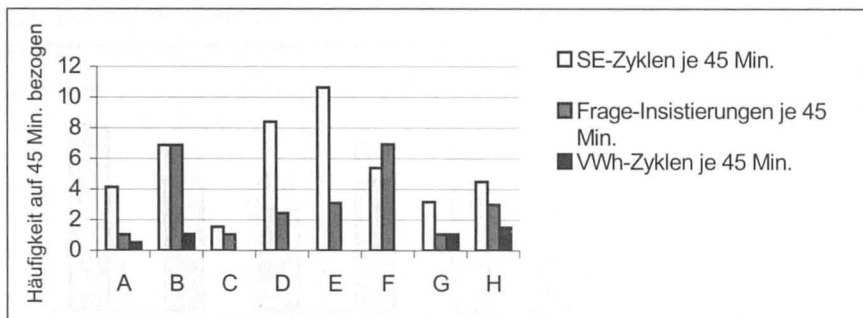
Im Unterrichtsgespräch der beobachteten Erarbeitung von Beweisen konnten wiederkehrende Grundfiguren identifiziert werden, die mit der Fragetechnik der Lehrer in Zusammenhang gebracht werden können. Es handelt sich um folgende drei „Figuren der Fragetechnik“:

- „Schwer-einfach-Zyklen“ (SE-Zyklen): Eine schwerere Frage (Kategorien 2 oder 3) ohne, mit falscher oder unvollständiger Antwort wird durch eine leichtere Frage oder eine Serie leichter Fragen abgelöst.
- „Frage-Insistierungen“: Eine Frage ohne, mit falscher oder unvollständiger Antwort wird ohne wesentliche Hilfestellung wiederholt gestellt.
- „Vereinfachungs-Wiederholungs-Zyklen“ (VWh-Zyklen): Eine längere Schülerantwort wird nochmals in einzelnen inhaltlichen Bestandteilen - meist kleinschrittig - erfragt.

In Abbildung 9 wird die Häufigkeit des Auftretens dieser drei Figuren der Fragetechnik, auf 45 Minuten bezogen, klassenweise dargestellt. Es ergeben sich starke Unterschiede zwischen Lehrern bzw. Klassen. Berücksichtigt man, dass pro Figur der Fragetechnik mindestens zwei, oft drei Lehrerfragen bzw. -aufforderungen umfasst werden, so lässt sich ein nicht unbedeutender Teil aller Lehrerfragen bzw. -aufforderungen als Bestandteil einer der drei Figuren einordnen. Offenbar handelt es sich bei den Figuren der Fragetechnik also um ein Merkmal, das Anhaltspunkte zur Beschreibung des Unterrichtsgesprächs liefern kann.

Erkennbar ist in Abbildung 9 das hohe Maß an Übereinstimmung zwischen den vom selben Lehrer unterrichteten Klassen D und E. Hier wurde ein häufiges Auftreten von „Schwer-Einfach-Zyklen“ und das Fehlen von „Vereinfachungs-Wiederholungs-Zyklen“ beobachtet. In den Klassen B und F finden sich hohe Werte von „Frage-Insistierungen“. Klasse G und insbesondere Klasse C fallen durch die niedrige Anzahl verzeichneter Figuren der Fragetechnik auf.

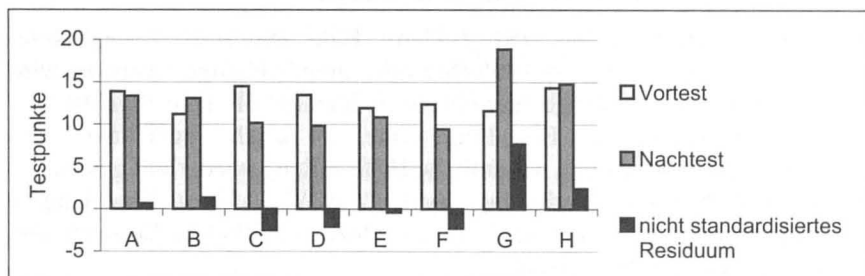
Abbildung 9: Häufigkeit bestimmter Figuren der Fragetechnik nach Klassen



Bevor die vorgestellten Ergebnisse diskutiert werden, sei für die betroffenen Klassen noch zum Vergleich auf die Leistungsdaten der Beweis- und Argumentationskompetenz eingegangen.

In Abbildung 10 werden Testpunktwerte in Vor- und Nachtest¹, sowie die nicht standardisierten Residuen² zwischen den beiden Tests wiedergegeben.

Abbildung 10: Beweis- und Argumentationskompetenz nach Klassen



Da Vor- und Nachtest voneinander verschieden waren, kann aus Abbildung 10 nicht gefolgert werden, dass die Beweis- und Argumentationskompetenz etwa in den Klassen C, D, E und F rückläufig war. Mit Hilfe der Residuenwerte können aber Aussagen über über- oder unterdurchschnittliche Entwicklungen der Beweis- und Argumentationskompetenz getroffen werden.

Ein überdurchschnittlicher Leistungszuwachs konnte in erster Linie für Klasse G festgestellt werden. Für Klasse C wurde, vergleichbar mit den Klassen D und F, eine leicht unterdurchschnittliche Leistungsentwicklung bei der Beweis- und Argumentationskompetenz verzeichnet.

¹ Gesamtpunktezahlen im Vortest: 26 Punkte, im Nachtest: 32 Punkte

² Die nicht standardisierten Residuen beziehen sich auf die gesamte Stichprobe von mehr als 500 Probanden in 27 Klassen, die an der Studie von Reiss, Hellmich & Thomas (2002) in Vor- und Nachtest teilgenommen hatten.

4. Diskussion

Für die betrachteten 19 Unterrichtsstunden war festzustellen, dass bei Erarbeitungen von Beweisen im Unterricht in der Regel das fragend-entwickelnde Unterrichtsverfahren zum Einsatz kam. Dies repliziert Befunde der TIMSS-Studie, wonach das fragend-entwickelnde Vorgehen das für Deutschland typische Unterrichtsskript darstellt (Baumert et al., 1997).

4.1 Inhaltliche Elemente bei der Erarbeitung von Beweisen

Die Ergebnisse zeigen insgesamt, dass eine Reihe von inhaltlichen Elementen der Behandlung von Beweisen in einigen Unterrichtsstunden nicht zu beobachten waren bzw. im Wesentlichen allein oder überwiegend vom Lehrer geleistet wurden.

Während „Voraussetzungen sammeln“, „Behauptung(en) formulieren“ und „Beweisredaktion“ sehr häufig im Unterricht auftraten, fanden andere inhaltliche Elemente, die geeignet erscheinen würden, übergreifendes Verständnis zu Zusammenhängen bei den behandelten Beweisen zu fördern, oftmals keinen Raum bei der Erarbeitung von Beweisen im Unterricht. Insbesondere in Klassen, in denen durchschnittlich ca. drei inhaltliche Elemente pro Beweiseinheit geleistet bzw. teilweise geleistet wurden, lässt sich die Erarbeitung von Beweisen offenbar auf einen Dreischritt aus „gegebene Aufgabenstellung“ - „Erfragen und Zusammenstellen von beweisrelevanten Fakten“ - „Beweisredaktion (Aufschreiben des Beweises)“ reduzieren. In anderen Klassen, etwa den Klassen C, G und H, fanden sich durchschnittlich etwa zwei inhaltliche Elemente mehr. Interessanterweise ging die damit verbundene stärkere inhaltliche Einbettung des Beweises im Unterricht einher mit substantiellen Beiträgen der Schüler zu diesen inhaltlichen Elementen, die sich in diesen Klassen, insbesondere in Klasse C und G, häuften.

Die Schülerbeiträge fielen in den übrigen Klassen sehr gering aus. Die Interpretation erscheint naheliegend, dass sich die Rolle der Schüler in diesen Klassen meist auf das Nennen und Wiedergeben durch den Lehrer erfragter Eigenschaften geometrischer Figuren bzw. isolierter, beweisrelevanter Fakten beschränkte.

Ein weiterer Aspekt erweist sich als besonders problematisch: In vielen Klassen erhielt der Aufbau von notwendigem Meta-Wissen zum mathematischen Beweisen offenbar nicht den erforderlichen Raum im Mathematikunterricht. Dabei handelte es sich nicht nur um beweisspezifisches Methodenwissen (vgl. Heinze & Reiss, 2003), das eine notwendige Voraussetzung für Beweis- und Argumentationskompetenz ist, sondern auch um Problemlöseheuristiken der Beweisgenerierung, sowie um ein übergreifendes Bewusstsein der Bedeutung des Beweises bzw. der Beweisbedürftigkeit. Dadurch, dass Bemerkungen zu allgemeinem Wissen über das Beweisen, die Diskussion der Beweisbedürftigkeit, die Entscheidung über den Beweisweg und die Verifikation/die Rückschau/der Überblick über den Beweis bzw.

die Diskussion des Beweises oft keine Rolle im beobachteten Unterricht spielten, ist davon auszugehen, dass in diesen Klassen die oben genannten Bereiche von Meta-Wissen im Mathematikunterricht nicht ausreichend in ihrem Aufbau unterstützt wurden.

Die Beispiele der Klassen C und G zeigten immerhin, dass Schritte in die Richtung einer Unterstützung von beweispezifischem Meta-Wissen auch unter den Bedingungen vorherrschenden fragend-entwickelnden Unterrichts möglich sind.

4.2 Anforderungsniveau der Lehrerfragen und -aufforderungen

Bei der Auswertung zu den Anforderungsniveaus der Lehrerfragen und -aufforderungen sowie zur Art ihrer Beantwortung durch die Schüler fällt der hohe Anteil einfacher Fragen auf, die insgesamt von den Lehrern gestellt wurden (vgl. Abbildung 3). Das Profil der zahlenmäßigen Anteile der verschiedenen Anforderungsniveaus weist jedoch größere Unterschiede zwischen Klassen bzw. Lehrern auf (vgl. Abbildung 4). Unterschiede in der Fragetechnik der Lehrer scheinen sich hier widerzuspiegeln. Insbesondere hatten die Klassen C und G deutlich verschiedene Profile.

Mit Blick auf die klassenbezogene Auswertung der nicht beantworteten bzw. der vollständig beantworteten Fragen stellt sich heraus, dass die beiden Klassen C und G sich auch hier von den anderen Klassen abhoben. Die vergleichsweise geringe Anzahl nicht beantworteter Fragen und der hohe Anteil an vollständig beantworteten Fragen deuten auf ein inhaltlich flüssigeres und vermutlich reichhaltigeres Unterrichtsgespräch hin, als es bei den anderen Klassen festgestellt werden konnte. Die klassenweise Auswertung der Anteile vollständig beantworteter Fragen bezogen auf die Zahl der jeweils gestellten Fragen liefert Anzeichen für eine bessere Passung im Anforderungsniveau der Lehrerfragen und -aufforderungen in den Klassen C und G (vgl. Abbildung 7).

Das Profil der Anforderungsniveaus, das sich in den Fragen und Aufforderungen der Lehrer in den Klassen C und G manifestiert, unterscheidet sich jedoch deutlich (vgl. Abbildung 4): Während in Klasse G vergleichsweise wenige anspruchsvollere Fragen gestellt wurden und der Eindruck eines sehr kleinschrittigen, offenbar stark gesteuerten Vorgehens mit hoher Frage-Frequenz entsteht, spielten in Klasse C Fragen mittleren Anforderungsniveaus eine besonders starke Rolle. Bei einer weit niedrigeren Fragefrequenz scheint sich eine ausreichende Überlegungszeit zu einer korrekten Beantwortung ernsthaft gestellter, anspruchsvollerer Fragen durch die Schüler ergeben zu haben.

Auch die Figuren der Fragetechnik ermöglichen Rückschlüsse auf Merkmale des Unterrichtsdiskurses.

So scheinen „Schwer-Einfach-Zyklen“ eine Ausdrucksform des „Kleinarbeitens komplexer Anforderungen“ (vgl. Klieme, 2002) zu sein. Diese Fi-

gur der Fragetechnik entstand oft aus einer fehlerhaft, nicht oder unvollständig beantworteten anspruchsvollen Frage des Lehrers heraus, zu der der Lehrer schrittweise Schülerantworten zu ermöglichen bzw. zu erleichtern und so Inhalte zu erarbeiten suchte. Problematisch wird diese Figur der Fragetechnik unter anderem dadurch, dass die Lernenden oft nicht über das notwendige Überblickswissen verfügen, das ein Einordnen der erfragten Einzelschritte in den gesamten Problemlösungsprozess erlauben würde.

„Frage-Insistierungen“ nehmen ebenfalls von einer fehlerhaft, nicht oder unvollständig beantworteten Frage ihren Ausgang. Es ist zweifelhaft, ob diese Figur der Fragetechnik die Lernenden zu einer intensiven Auseinandersetzung mit einer Fragestellung anregt. Oft sind Situationen, in denen „Frage-Insistierungen“ auftreten, mit nicht optimaler Passung der Fragen bzw. Aufforderungen der Lehrer und einem eher unproduktiven Stocken im Unterrichtsdiskurs zu assoziieren. Für diese Interpretation scheint auch ein Vergleich mit den Daten von Abb. 7 zu sprechen.

Für die Klassen C und G wurden vergleichsweise geringe Häufigkeiten dieser Figuren der Fragetechnik verzeichnet. Möglicherweise kann darin ein weiteres Anzeichen für einen vergleichsweise flüssigen und kognitiv aktivierenden Unterricht in diesen Klassen gesehen werden.

Setzt man die gewonnenen Befunde zu den erhobenen Leistungsdaten in Beziehung, so fällt auf, dass für Klasse G ein relativ hoher Leistungszuwachs der Beweis- und Argumentationskompetenz zu verzeichnen war, während die Beweis- und Argumentationskompetenz in Klasse C im Vergleich zum Gesamtdurchschnitt aller 27 getesteten Klassen (vgl. Reiss & Thomas, 2003) leicht abnahm.

Es sei in diesem Zusammenhang noch einmal daran erinnert, dass die Klassen C und G sich sowohl hinsichtlich einer höheren Anzahl geleisteter inhaltlicher Elemente und größerer Schülerbeiträge zu diesen, als auch im Hinblick auf einen höheren Anteil richtig beantworteter Lehrerfragen eines höheren Anforderungsniveaus von der Mehrzahl der anderen Klassen unterschieden. Gleichzeitig ergaben sich zwischen den beiden Klassen größere Unterschiede im Profil der Anforderungsniveaus der Lehrerfragen bzw. -aufforderungen: Während in Klasse G weit mehr Fragen geringen Anforderungsniveaus gestellt wurden, wiesen die Lehrerfragen und -aufforderungen in Klasse C bei einer weit geringeren Frage-Frequenz häufig ein gehobenes Anforderungsniveau auf.

Zusammen mit den nicht unüberraschenden Befunden der Leistungsentwicklung scheinen sich also eine Reihe von Vermutungen zu ergeben:

- Schülerbeteiligung an inhaltlichen Elementen der Beweisrahmung stellt möglicherweise eine notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für Leistungszunahme im Bereich des mathematischen Beweisens und Argumentierens dar.

- Die Wahl eines eher niedrigeren Anforderungsniveaus von Fragen und Aufforderungen könnte bei der Erarbeitung von Beweisen eine notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Leistungszunahme darstellen.
- Eine hohe Frage-Frequenz kann ohne negative Auswirkungen für die Lernenden bleiben.
- Eine hohe Anzahl behandelter inhaltlicher Elemente pro Beweiseinheit scheint förderlich, aber nicht hinreichend für Leistungssteigerung zu sein.

Diese Vermutungen werfen eine Reihe von Fragen auf und enthalten ein hohes Diskussionspotential. Es ergibt sich jeweils weiterer Untersuchungsbedarf. Das Einbeziehen zusätzlicher Daten über die beteiligten Klassen und Schüler, etwa aus dem Bereich von Interesse und Motivation, sowie eine detailgenauere Analyse wichtiger Ausschnitte der Unterrichtsvideos mit qualitativen Methoden könnte weiteren Aufschluss zu einer treffenden Interpretation der beobachteten Klassenunterschiede geben.

Literatur

- Baumert, J.; Lehmann, R. et al. (1997). TIMSS - Mathematisch-naturwissenschaftlicher Unterricht im internationalen Vergleich. Deskriptive Befunde. Opladen: Leske + Budrich.
- Boero, P. (1999). Argumentation and mathematical proof: A complex, productive, unavoidable relationship in mathematics and mathematics education. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, 1999, 7-8.
- Clausen, M., Reusser, K. & Klieme, E. (2003). Unterrichtsqualität auf der Basis hoch-inferenter Unterrichtsbeurteilungen: Ein Vergleich zwischen Deutschland und der deutschsprachigen Schweiz. Unterrichtswissenschaft, 31 (2), 122-141.
- Deutsches PISA-Konsortium (2001). (Hrsg.). PISA 2000. Basiskompetenzen von Schülerinnen und Schülern im internationalen Vergleich. Opladen: Leske + Budrich.
- Gruehn, S. (2000). Unterricht und schulisches Lernen. Münster: Waxmann.
- Healy, L. & Hoyles, C. (1998). Justifying and proving in school mathematics. Technical Report on the Nationwide Survey, Mathematical Science. London.
- Heinze, A. & Reiss, K. (2003). Reasoning and Proof: Methodological Knowledge as a Component of Proof Competence. International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof, Spring 2003. [<http://www.lettredelapreuve.it/CERME3Papers/Heinze-paper1.pdf>].
- Heinze, A. & Reiss, K. (i.V.). Individuelle Unterschiede vs. Unterschiede zwischen verschiedenen Klassen in Bezug auf Mathematikleistung und Interesse.
- Klieme, E. (2002). Was ist guter Unterricht? Ergebnisse der TIMSS-Video-studie im Fach Mathematik. In W. Bergsdorf et al. (Hrsg.), Herausforderungen der Bildungsgesellschaft. [4. Ringvorlesung der Universität Erfurt] (S. 89-113). Weimar: RhinoVerlag.

- Klieme, E., Schümer, G. & Knoll, S. (2001). Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I: „Aufgabenkultur“ und Unterrichtsgestaltung im internationalen Vergleich. In: E. Klieme & J. Baumert (Hrsg.), TIMSS -Impulse für Schule und Unterricht (S. 43-57). Bonn: Bundesministerium für Bildung und Forschung.
- Kuntze, S. (2003). Wie beteiligen Lehrer ihre Schüler an Beweisen im Geometrieunterricht? Erste Ergebnisse einer Auswertung videografierten Unterrichtsstunden. In W. Henn (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2003 (S. 373-376). Hildesheim: Franzbecker.
- Kuntze, S., Rechner, M. & Reiss, K. (i.V.). Inhaltliche Elemente und Anforderungsniveau des Unterrichtsgesprächs beim geometrischen Beweisen - Eine Analyse videografierten Unterrichtsstunden.
- Neubrand, J. (2002). Eine Klassifikation mathematischer Aufgaben zur Analyse von Unterrichtssituationen. Hildesheim: Franzbecker.
- Polya, G. (1949). Schule des Denkens. Bern: Francke.
- Reiss, K. (2002). Beweisen, Begründen, Argumentieren. Wege zu einem diskursiven Mathematikunterricht. In W. Peschek (Hrsg.), Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. (S. 39-46). Hildesheim: Franzbecker
- Reiss, K.; Hellmich, F. & Thomas, J. (2002). Individuelle und schulische Bedingungsfaktoren für Argumentationen und Beweise im Mathematikunterricht. In M. Prenzel & J. Doll (Hrsg.), 45. Beiheft zur Zeitschrift für Pädagogik (S. 51-64). Weinheim: Beltz.
- Reiss, K., Klieme, E. & Heinze, A. (2001). Prerequisites for the Understanding of Proofs in the Geometry Classroom. Proceedings of the 25th Conference for the Psychology of Mathematics Education. Utrecht.
- Reiss, K. & Thomas, J. (2003). Begründen und Beweisen in der Geometrie - Bedingungen des Wissensaufbaus bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe [Interner Zwischenbericht an die DFG].
- Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. New York: Academic Press.
- Stein, M. (1986). Beweisen. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Steinhöfel, W. & Reichold, K. (1971). Zur Behandlung mathematischer Sätze und ihrer Beweise im Mathematikunterricht (Teil 1). Math. Schule, 11/1971, 700-707.
- Voigt, J. (1984a). Der kurztaktige, fragend-entwickelnde Unterricht. Szenen und Analysen. Mathematica didactica 7, 161-186.
- Voigt, J. (1984b). Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht. Weinheim: Beltz.

Anschrift der Autoren:

Sebastian Kuntze, Prof. Dr. Kristina Reiss, Universität Augsburg, Lehrstuhl für Mathematikdidaktik, Universitätsstr. 10, 86135 Augsburg,
E-Mail: sebastian.kuntze@math.uni-augsburg.de